Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ 25/10/16

Άσκηση
(i) $\bar{x}$ μεμονωμένο σημείο του $U \Rightarrow \bar{x} \in U \cap \partial U$
(ii) $\bar{x} \in U \Rightarrow$ ή $\bar{x}$ μεμονωμένο σημείο ή $\bar{x}$ σημείο συσσώρευσης του U
(iii) $\mathrm{ext}\,U \subset \mathbb{R}^n \setminus U'$
(iv) $\mathrm{int}\,U \subset U'$

Υπενθύμιση Ορισμών

$\bar{x}$ μεμονωμένο σημείο του $U \Leftrightarrow \exists \varepsilon>0 : U \cap B(\bar{x},\varepsilon) = \{\bar{x}\}$

$\bar{x}$ σημείο συσσώρευσης του $U \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0 : U \cap B(\bar{x},\varepsilon) \setminus \{\bar{x}\} \neq \emptyset$
$(\Leftrightarrow \bar{x} \in U')$

$\bar{x}$ σημείο επαφής του $U \Leftrightarrow \bar{x} \in U$ ή $\bar{x}$ σ.σ. του $U \Leftrightarrow$
$\bar{x} \in U \cup U'$

Απόδειξη - Λύση της άσκησης

(i) $\varepsilon>0 : \forall \bar{y} \in B(\bar{x},\varepsilon) \setminus \{\bar{x}\} : \bar{y} \in \mathbb{R}^n \setminus U \Rightarrow$
$(\exists \varepsilon>0 : U \cap B(\bar{x},\varepsilon) = \{\bar{x}\}$, αφού $\bar{x}$ μεμονωμένο$)$

$\Rightarrow \forall\ 0<\varepsilon'\leq\varepsilon : B(\bar{x},\varepsilon) \cap (\mathbb{R}^n \setminus U) \neq \emptyset \Rightarrow$
$\rightarrow \forall\ \varepsilon>0 : B(\bar{x},\varepsilon) \cap (\mathbb{R}^n \setminus U) \neq \emptyset$ (άρα το $\bar{x}$ δεν είναι εσωτερικό σημείο) $\Rightarrow \bar{x} \notin \mathrm{int}\,U$
και $\forall \varepsilon>0 : B(\bar{x},\varepsilon) \not\subset \mathbb{R}^n \setminus U \Rightarrow \bar{x} \notin \mathrm{ext}\,U$

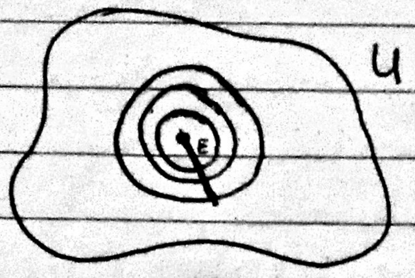
(ii) Έστω $\bar{x} \in U$ μεμονωμένο σημείο (OK!)
Έστω $\bar{x}$ δεν είναι μεμονωμένο σημείο $\Rightarrow$
$!(\exists \varepsilon>0 : U \cap B(\bar{x},\varepsilon) = \{\bar{x}\} \Leftrightarrow U \cap B(\bar{x},\varepsilon) \setminus \{\bar{x}\} = \emptyset) \Rightarrow$
$\forall \varepsilon>0 : U \cap B(\bar{x},\varepsilon) \setminus \{\bar{x}\} \neq \emptyset \Leftrightarrow \bar{x}$ σ.σ.

(iii) Έστω $\bar{x} \in \operatorname{int} U \xRightarrow{\text{ορισμός}} \exists \varepsilon > 0 : B(\bar{x}, \varepsilon) \subset U \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : U \cap B(\bar{x}, \varepsilon) \setminus \{\bar{x}\} \neq \emptyset \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \varepsilon' \geq \varepsilon : U \cap B(\bar{x}, \varepsilon') \setminus \{\bar{x}\} \neq \emptyset$

(κάθε μπάλα με μικρότερη ακτίνα από την αρχική, είναι μέσα στην μεγάλη μπάλα)



Ισχύει και $\forall\ 0 < \varepsilon' \leq \varepsilon \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad U \cap B(\bar{x}, \varepsilon) \setminus \{\bar{x}\} \neq \emptyset$

(iv) $\mathbb{R}^n \setminus U' \overset{\text{ορισμός}}{=} \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \exists \varepsilon > 0 : B(\bar{x}, \varepsilon) \setminus \{\bar{x}\} \cap U = \emptyset\}$

$\operatorname{ext} U \overset{\text{ορ.}}{=} \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \underbrace{\exists \varepsilon > 0 : B(\bar{x}, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^n \setminus U}\}$

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : B(\bar{x}, \varepsilon) \cap U = \emptyset \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : B(\bar{x}, \varepsilon) \setminus \{\bar{x}\} \cap U = \emptyset$

Πρόταση: Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$. Τότε:

$\bar{U} = U \cup U'$

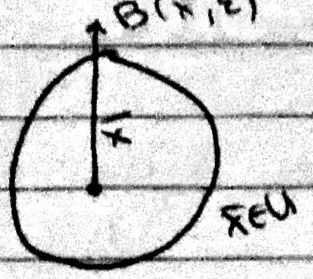
Απόδειξη

($\Leftarrow$) Ισχύει πάντα $U \subset U'$. Θδο $U' \subset \bar{U}$, δηλαδή $\mathbb{R}^n \setminus \bar{U} \subset \mathbb{R}^n \setminus U'$. Έστω $\bar{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{U} \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$: $B(\bar{x}, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^n \setminus \bar{U} \subset \mathbb{R}^n \setminus U \Rightarrow B(\bar{x}, \varepsilon) \cap U = \emptyset \Rightarrow$ $B(\bar{x}, \varepsilon) \setminus \{\bar{x}\} \cap U = \emptyset \Rightarrow \bar{x} \notin U' \Leftrightarrow \bar{x} \in \mathbb{R}^n \setminus U'$

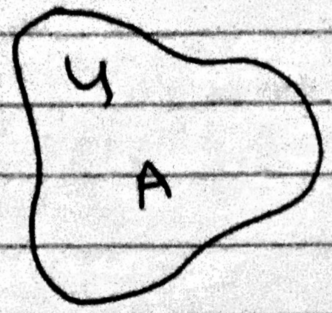
($\Rightarrow$) Θδο $\bar{U} \subset U \cup U' \Leftrightarrow \underbrace{\mathbb{R}^n \setminus (U \cup U')}_{= (\mathbb{R}^n \setminus U) \cap (\mathbb{R}^n \setminus U')} \subset \mathbb{R}^n \setminus \bar{U}$

Έστω το $\bar{x} \in \mathbb{R}^n \setminus U$ δεν είναι σημείο συσσώρευσης $\Rightarrow$ $\exists \varepsilon > 0 : B(\bar{x}, \varepsilon) \cap U = \emptyset \Rightarrow U \subset \mathbb{R}^n \setminus B(\bar{x}, \varepsilon) \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{U} \subset \mathbb{R}^n \setminus B(\bar{x}, \varepsilon) \Rightarrow B(\bar{x}, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^n \setminus \bar{U} \Rightarrow \bar{x} \in B(\bar{x}, \varepsilon)$



$\bar{x}$: μεμονωμένο σημείο
$U = A \cup \{\bar{x}\}$



- $\bar{U} \subset \mathbb{R}^n \setminus B(\bar{x},\varepsilon)$
  ↳ η τομή όλων των κλειστών συνόλων που περιέχουν το U

$$\left.\begin{array}{l} \bar{U} = \cap K \\ K \supset U \\ K: \text{κλειστό} \end{array}\right.$$

Είναι σύνολο που περιέχει το U: $\underbrace{\mathbb{R}^n \setminus \underbrace{B(\bar{x},\varepsilon)}_{\text{κλειστό}}}_{\text{ανοικτό}}$

<u>Θεώρημα</u>: U κλειστό $\Longleftrightarrow U' \subset U$
↳ απόδειξη: U κλειστό $\Longleftrightarrow \underbrace{U = \bar{U}}_{\Longleftrightarrow U = U \cup U'} \xLeftrightarrow{\text{θυσο}} U' \subset U$

<u>Πρόταση</u>: (S.O.S. για κλειστά σύνολα)
Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$. Τότε:
$\bar{U} = \text{Int}\, U \cup \partial U$ — απόδειξη →

(<u>Παράδειγμα</u>: $\bar{B}(\bar{x},r) = \underbrace{B(\bar{x},r)}_{=U=\text{int}\,U} \cup \partial B(\bar{x},r)$

$\boxed{B(\bar{x},r) = U = \text{int}\,U}$)

(Απόδειξη πρότασης) $\mathbb{R}^n = \mathrm{int}U \cup \mathrm{ext}U \cup \mathrm{bd}U$

Θνδο : $\mathbb{R}^n \setminus \bar{U} = \mathrm{ext}U$ ∴ Άρα $\bar{U}$ κλειστό και $U \subset \bar{U}$

($\bar{U}$ κλειστό)

Έπωμε $\mathbb{R}^n \setminus \bar{U} = \mathrm{int}(\mathbb{R}^n \setminus \bar{U}) \subset \mathrm{int}(\mathbb{R}^n \setminus U) = \mathrm{ext}U$

$\bar{x} \in \mathrm{ext}U \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : B(\bar{x}, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^n \setminus U$

$\bar{x}$: δεν είναι σ.σ.

Συνεπώς: $\bar{x} \in (\mathbb{R}^n \setminus U) \cap (\mathbb{R}^n \setminus U')$ ⊛

($\bar{y}$ σ.σ. $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : B(\bar{y}, \varepsilon) \cap U \setminus \{\bar{y}\} \neq \emptyset$) υπενθύμιση.

⊛ $\Leftrightarrow \bar{x} \in \mathbb{R}^n \setminus (U \cup U') \Leftrightarrow \bar{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{U}$

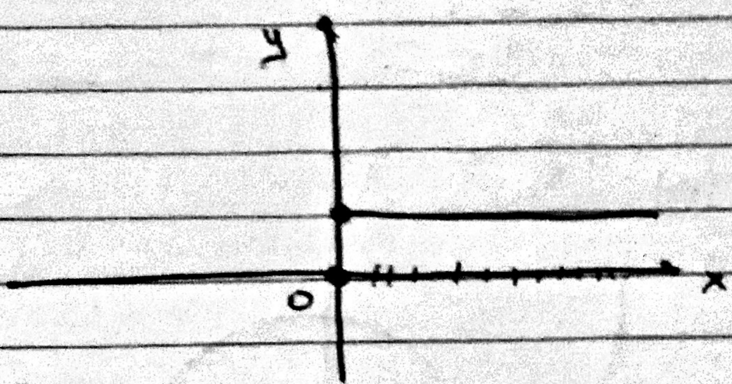
(άσκηση 1.2. κεφ. 1.3. στο Γ.Γ)

11

<u>Ακολουθίες στον $\mathbb{R}^n$</u> ($\rightarrow$ όρια συναρτήσεων $\rightarrow$ συνέχεια συναρτήσεων και παράγωγος συναρτήσεων)

<u>Παράδειγμα</u>: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$



Η f δεν είναι συνεχής στο $x=0$

αφού π.χ. $f\left(\frac{1}{\nu}\right) \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 1$, ενώ $f\left(-\frac{1}{\nu}\right) \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0$

<u>Ορισμός</u>: Η f είναι συνεχής στο $x_0 \Longleftrightarrow$

$\forall\ (x_n) \subset \mathbb{R}$ με $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0$, τότε $f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(x_0) \in \mathbb{R}$

Τα x_n πλησιάζουν το x_0

Δηλαδή τα x_n είναι "όλο και πιο κοντά" στο x_0

$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$ ~~[illegible]~~

$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N} : (\forall n \geq n_0)$:

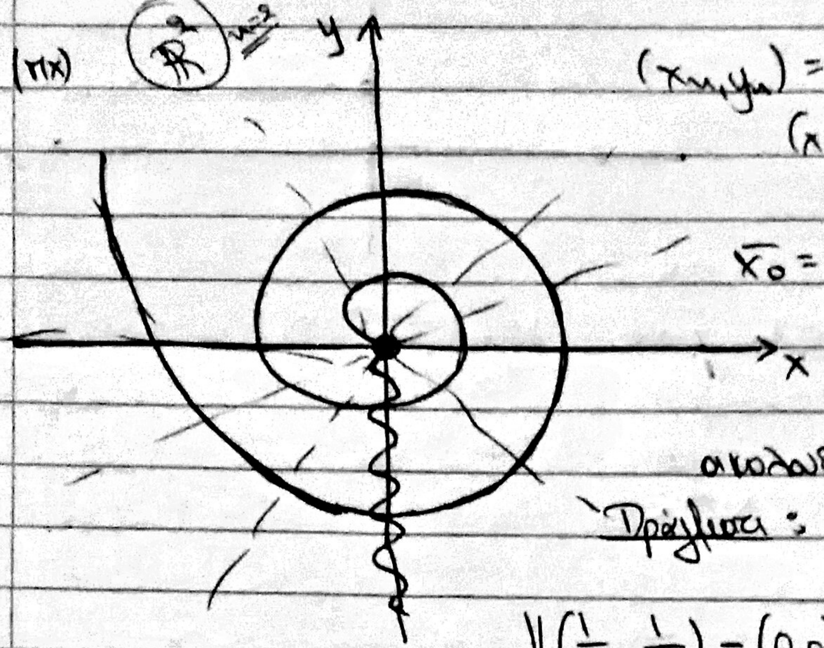
$|x_n - x_0| < \varepsilon \Longleftrightarrow |x_n - x_0| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

απόσταση

<u>Ορισμός</u>: Μια ακολουθία $(\bar{x}_n) \subset \mathbb{R}^n$, δηλ. το διατεταγμένο σύνολο $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, \dots\} = \{\bar{x}_n \in \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}\}$, συγκλίνει στο $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ αν-ν:

$$\|\bar{x}_n - \bar{x}_0\| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \text{ και συμβολίζεται } \bar{x}_n \xrightarrow{n\to\infty} \bar{x}_0$$

(πχ) $\mathbb{R}^2$ $n=2$



$(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, 0)$

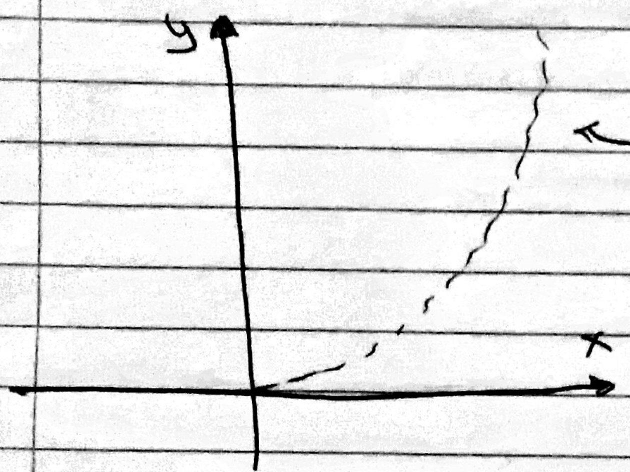
$(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$

$\bar{x}_0 = \bar{0}$

ακολουθίες που πηγαίνουν στο $\bar{x}_0$

<u>Πράγματι</u>: $\|(\frac{1}{n}, 0) - (0,0)\| = \frac{1}{n} \to 0$

$$\|(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) - (0,0)\| = \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{\sqrt{2}}{n} \to 0$$



$\leftarrow \{(x, x^2), x \geq 0\}$

$(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2})$

$$(x_n, y_n) = (\sin\frac{1}{n}, \frac{\cos\frac{1}{n}}{n^2}) \xrightarrow[n\to\infty]{?} (0,0) \Leftrightarrow$$

$$\|(x_n, y_n) - (x_0, y_0)\| \to 0 \Leftrightarrow \|(x_n, y_n) - (x_0, y_0)\|^2 \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$\underbrace{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2}_{\geq (x_n - x_0)^2 \geq 0} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l}(x_n - x_0)^2 \to 0 \\ (y_n - y_0)^2 \to 0\end{array}\right\} \left.\begin{array}{l}|x_n - x_0| \to 0 \\ |y_n - y_0| \to 0\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}x_n \to x_0 \\ y_n \to y_0\end{array}\right\}$$

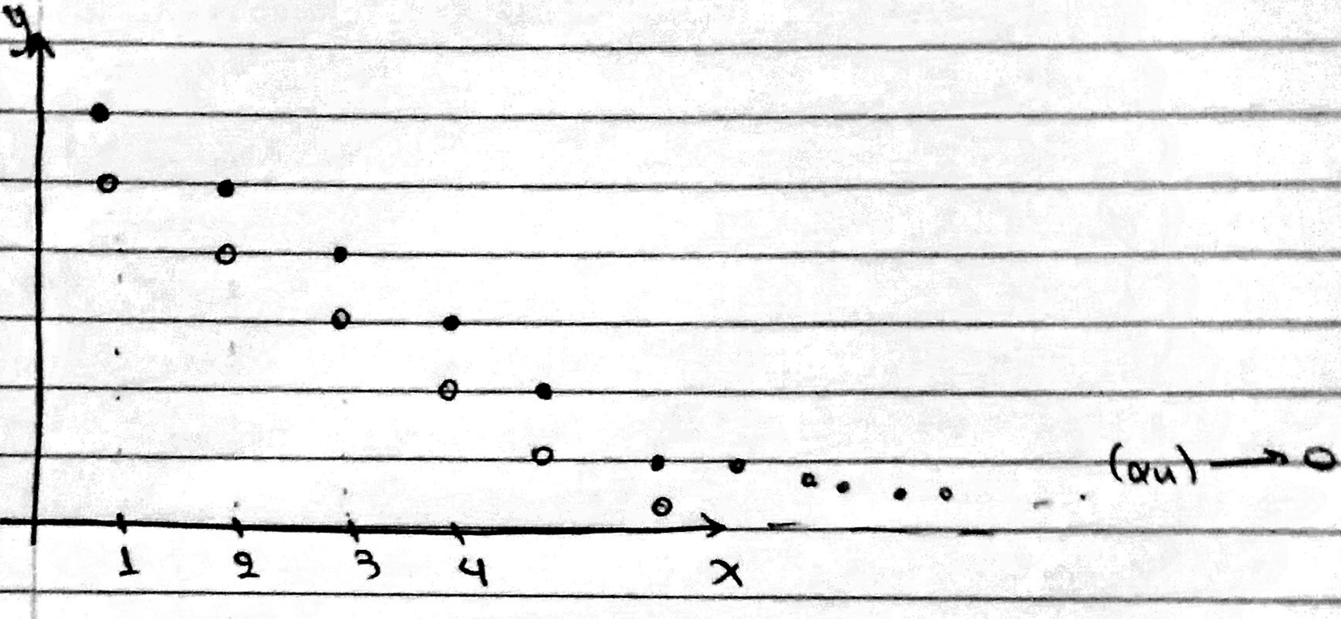
αφού η $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ είναι συνεχής $\Rightarrow \forall a_n \to 0: f(a_n) = a_n^2 \to 0$

$$\boxed{a_n \to 0 \iff a_n^2 \xrightarrow{n\to\infty} 0}$$

• $g:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\sqrt{x}$, είναι συνεχής $\Rightarrow \{\forall \underset{\geq 0}{b_n} \to 0 \Rightarrow \sqrt{b_n}\xrightarrow{n\to\infty}0\} \Rightarrow \{\forall a_n^2 \to 0\ \sqrt{a_n^2}=|a_n|\to 0 \iff$
$\iff a_n\to 0\}$

$a_n\to 0$, $(\forall\varepsilon>0)(\exists n_0\in\mathbb{N}$ με $n\geq n_0$: $\|a_n\|<\varepsilon)$

$$|a_n|\to 0 \iff a_n\to 0$$



<u>Δηλαδή, δείξαμε ότι:</u>

$$\overset{\in\mathbb{R}^2}{(x_n,y_n)} \xrightarrow{n\to\infty} (x_0,y_0) \iff x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0 \ \text{(στο } \mathbb{R}\text{)}$$
$$y_n\xrightarrow{n\to\infty} y_0 \ \text{(στο } \mathbb{R}\text{)}$$

• $\overset{\in\mathbb{R}^n}{\bar{x}_n} = \overbrace{(x_n^{(1)},\dots,x_n^{(n)})}^{\in\mathbb{R}^n} \xrightarrow{n\to\infty} \bar{x}_0 = \underset{\in\mathbb{R}^n}{(x_0^{(1)},\dots,x_0^{(n)})}$

$\iff \forall j=1,\dots,n: x_n^{(j)}\xrightarrow{n\to\infty} x_0^{(j)}$ (στο $\mathbb{R}$).